数理解析研究所講究録
1512巻 2006年 67-81

リーマンゼータ関数の明示公式について

神谷諭一 (Yuichi Kamiya)

この報告では，鈴木正俊氏と著者との共同研究 [7] の結果を紹介したい．そのために，まず，明示公式についての著者なりの概説をし，その後に共同研究の結果を述べたい．これは遠回りな道であるかもしれないが，理解を助けるものであると思う．尚，概説については，若干の不正確さはご勘弁を．

1 導入

$s=\sigma+it$ を複素変数とする．$\zeta(s)$ を Riemann ゼータ関数とする．$\zeta(s)$ の非自明零点を $\rho=\beta+i\gamma$ と記す．いわゆる，"Riemann ゼータ関数の明示公式" とは，Riemann ゼータ関数の零点にわたる和と，素数にわたる和を結ぶ公式の総称を意味する．最も古典的な明示公式は Riemann によって提示された

$$\sum_{2\leq n\leq X}{}' \Lambda(n)=X-\sum_{\rho}\frac{X^{\rho}}{\rho}-\frac{\zeta'}{\zeta}(0)-\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{X^{2}}\right)$$

但し，$\sum_{2\leq n\leq X}{}'$ は X が整数のときは最後の項だけ $\frac{1}{2}$ 倍してたすことを意味する，であろう (Davenport [5] p.60 参照)．この公式の切断版と，$\zeta(s)$ は垂直線 $\sigma=1$ 上に零点を持たないという事実から，素数定理が証明されることは有名である ([5] 18 章参照)．

問題に応じて，適切な明示公式を構成し，それを利用することがある．このことを説明するために，Selberg の明示公式と Montgomery の明示公式を引用しよう．また，それから彼らが導いた結果についても簡単に紹介する．

2 Selberg の明示公式

$N(T)$ で $\zeta(s)$ の $0<\gamma<T$ なる非自明零点の個数を表す．このとき，

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+\frac{7}{8}+S(T)+O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$S(T)=-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\Im\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)\right)d\sigma \tag{1}$$

が知られている．また，$S(T)=O(\log T)$ となることも知られている ([5] 16 章参照)．Littlewood [9] では，Riemann 予想の仮定のもとで

$$S(T)=O\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right)$$

が示された．Selberg [12] ではこの評価の別証明 (やはり Riemann 予想は仮定する) を次の明示公式から導いた．

Selberg の明示公式 s は $\zeta(s)$ の零点とは異なるとし，また $s \neq 1$ とする．このとき

$$\begin{aligned}\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = &-\sum_{2\leq n<X}\frac{\Lambda(n)}{n^s} - \sum_{X\leq n\leq X^2}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\Big(2-\frac{\log n}{\log X}\Big)\\ &-\frac{X^{1-s}(1-X^{1-s})}{(\log X)(1-s)^2} + \frac{1}{\log X}\sum_\rho \frac{X^{\rho-s}(1-X^{\rho-s})}{(\rho-s)^2}\\ &+\frac{1}{\log X}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{X^{-(2j+s)}(1-X^{-(2j+s)})}{(2j+s)^2}.\end{aligned}$$

Selberg は Littlewood の評価の別証明を与えただけではなく，$S(T)$ のべき乗平均，符号変化などを深く研究して，重要な結果を数多く残した．それらの研究の第一歩は上の明示公式にあるといってよいと思う．

さて，(1) によって，$S(T)$ のことを良く知るには，$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ の良い近似式を作ればよいだろうと思わる．Selberg の明示公式はまさにその近似式とみなすことができる．Selberg の明示公式の利点を述べていこう．

最も単純な明示公式は

基本明示公式

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\sum_{2\leq n\leq X}{}'\frac{\Lambda(n)}{n^s} + \frac{X^{1-s}}{1-s} - \sum_\rho\frac{X^{\rho-s}}{\rho-s} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{X^{-(2j+s)}}{2j+s}$$

である．尚，$s=0$ とおけば Riemann の明示公式になる．ここで，非自明零点にわたる和

$$\sum_\rho \frac{X^{\rho-s}}{\rho-s}$$

は絶対収束していないので取り扱いにくい．そこで，基本明示公式をスムーズ化して，非自明零点にわたる和が絶対収束するように変更できないかと考えることは自然であろう (ここでスムーズ化と書いた意味については後で説明する)．Selberg の明示公式では

$$\frac{1}{\log X}\sum_\rho\frac{X^{\rho-s}(1-X^{\rho-s})}{(\rho-s)^2} \tag{2}$$

は絶対収束している．

(2) は和が絶対収束する以外にも重要な性質を持っている．Riemann 予想を仮定すると，

$$\left|\frac{1}{\log X}\sum_\rho\frac{X^{\rho-s}(1-X^{\rho-s})}{(\rho-s)^2}\right| \leq \frac{X^{\frac12-\sigma}(1+X^{\frac12-\sigma})}{\log X}\sum_\gamma\frac{1}{(\frac12-\sigma)^2+(\gamma-t)^2}$$

となる．従って，$\frac{1}{2} < C \le \sigma$ ならば

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\sum_{2\le n<X} \frac{\Lambda(n)}{n^s} - \sum_{X\le n\le X^2} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\Big(2 - \frac{\log n}{\log X}\Big) - \frac{X^{1-s}(1-X^{1-s})}{(\log X)(1-s)^2} + O\Big(\frac{X^{\frac{1}{2}-\sigma}}{\log X}\Big) \tag{3}$$

となる．この表示は，$\zeta(s)$ 本体に関する近似式

$$\zeta(s) = \sum_{n\le X} \frac{1}{n^s} - \frac{X^{1-s}}{1-s} + O\Big(\frac{1}{X^\sigma}\Big) \tag{4}$$

と良く似ていることは注目すべきであろう (Titchmarsh [13] p.77, Th 4.11)．(3) により

$$S(T) = -\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{C} \Im\Big(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)\Big)d\sigma - \frac{1}{\pi}\int_{C}^{\infty} \Im\Big(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)\Big)d\sigma$$

の右辺第二項については分析の見込みがたった．問題は右辺第一項である．$\frac{1}{2} < \sigma \le C$ では $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ の近似の状態は，(3) に比べて，劇的に変化するようである．つまり，非自明零点にわたる和 (2) は，Selberg の明示公式の Dirichlet 多項式の部分と同等の影響を与えるようである．(2) の処理のために，Selberg は非常に巧みな議論をしているが，その議論からも，(2) の近似式への影響は大きいであろうことが感じられる ([12] p.6–7)．また，最近の論文 Goldston–Gonek–Montgomery [6] において，$\int_1^T \left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\frac{1}{2} + \frac{a}{\log T} + it)\right|^2 dt$ なる量の考察が行われているが，その結果も，(2) の近似式への影響は大きいであろうことを示唆している．この状況は，$\zeta(s)$ の二乗平均 $\int_1^T |\zeta(\frac{1}{2}+it)|^2 dt$ の漸近式を導くには，(4) では不十分で，近似関数等式が必要とされる状況と類似しており，興味深いと思う．

3　Montgomery の明示公式

Montgomery の明示公式は次のものである．

Montgomery の明示公式 Riemann 予想を仮定する．

$$2\sum_{\gamma} \frac{Y^{i(\gamma-t)}}{1+(\gamma-t)^2} = -Y^{-\frac{1}{2}-it}\Bigg(\sum_{2\le n\le Y} \Lambda(n)\Big(\frac{Y}{n}\Big)^{-\frac{1}{2}+it} + \sum_{n>Y} \Lambda(n)\Big(\frac{Y}{n}\Big)^{\frac{3}{2}+it}\Bigg)$$
$$+ Y^{-1}(\log(|t|+2) + O(1)) + O\Big(\frac{\sqrt{Y}}{|t|+2}\Big)$$

この明示公式は，二つの基本明示公式の差をとることによって導かれる．証明はけっして難しくはないけれども，その意図は理解しにくい．後で，Weil の明示公式の観点から，Montgomery の明示公式を眺めてみよう．また，右辺の $Y^{-1}(\log(|t|+2)+O(1))$

は $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ に由来するが，これについても先送りする．ここでは，この明示公式を用いて Montgomery [11] で導かれた結果を大雑把に紹介しよう．

$$\int_0^T \left| 2\sum_\gamma \frac{Y^{i(\gamma-t)}}{1+(\gamma-t)^2} \right|^2 dt$$

を考察する．そのまま計算すると，ほぼ

$$\sum_{0<\gamma\le T} \sum_{0<\gamma'\le T} Y^{i(\gamma-\gamma')} w(\gamma-\gamma'), \tag{5}$$

但し，w はある重み関数，となる．一方，Montgomery の明示公式を用いて計算すると，本質的に，Dirichlet 多項式の部分の二乗平均と $Y^{-1}\log(|t|+2)$ の二乗平均を計算することになる．Dirichlet 多項式の部分の二乗平均は平均値理論の標準的な方法で計算できる．$Y^{-1}\log(|t|+2)$，これは $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ からきているのだが，の二乗平均はもちろん容易であるが，この二乗平均も，Dirichlet 多項式の部分の二乗平均と同等な影響を与えており，先に述べた，近似関数等式や，Selberg の明示公式で σ が $\frac{1}{2}$ に近い時の状況と似ている．

最終的に，(5) をパラメーター Y と T を含む漸近式として表示できる．こうして得た漸近式から $\sum_{0<\gamma\le T}\sum_{0<\gamma'\le T,\gamma'=\gamma} 1$ の upper bound が導かれ，それを用いて，Montgomery は "Riemann 予想のもとで，$\zeta(s)$ の非自明零点全体のうち $\frac{2}{3}$ は一位の零点である" という結果を導いた．

4 Weil–Barner の明示公式

我々は，Selberg の明示公式，Montgomery の明示公式を Weil の明示公式の観点から眺めたいのである．まずは，Weil の明示公式の考え方を簡単に紹介してみよう．

$(0,\infty)$ 上の関数 g がある良い class に属しているとする．Mellin 変換

$$(Mg)(w) = \int_0^\infty g(x)x^w \frac{dx}{x}$$

を考える．Mg を $\frac{1}{2}$ だけシフトしたものを $M_{\frac{1}{2}}g$ とする．即ち，
$(M_{\frac{1}{2}}g)(w) = (Mg)\left(w-\frac{1}{2}\right)$ と定義しよう．$\delta>0$ とし，

$$\int_{1+\delta-i\infty}^{1+\delta+i\infty} -\frac{\zeta'}{\zeta}(w)(M_{\frac{1}{2}}g)(w)dw \tag{6}$$

を考察する．これは，$\frac{\zeta'}{\zeta}$ の Dirichlet 級数表示と Mellin 反転公式を考慮すれば $\sum_{n=2}^\infty \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}g(n)$ となる．一方，(6) における積分路を $\Re w=-\delta$ にシフトすると $\frac{\zeta'}{\zeta}$ の極，つまり，ζ の非自明零点に対する量と，$s=1$ における極に対する量がとりだせる．$\Re w=-\delta$ に

シフトした積分の被積分関数に ζ の対数微分の表示を入れ，Mellin 反転公式を適用させれば，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}g\left(\frac{1}{n}\right)$ と $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ を $\Re w=-\delta$ 上で積分した量がでてくる．その積分については，積分路を $\Re w=\frac{1}{2}$ にシフトする．以上の量を組み合わせたものが Weil の明示公式の基本形である．

ところで，Mg を $\frac{1}{2}$ だけシフトしたもの $M_{\frac{1}{2}}g$ を考えたのであるが，この $\frac{1}{2}$ は $\zeta(s)$ の臨界領域の中心 $s=\frac{1}{2}$ からきている．けれども，$0\leq\sigma\leq1$ なる任意の s でシフトしたものを考えてもかまわない．つまり，$(M_sg)(w)=(Mg)(w-s)$ と定義し，

$$\int_{1+\delta-i\infty}^{1+\delta+i\infty}-\frac{\zeta'}{\zeta}(w)(M_sg)(w)dw$$

について，上と同様の議論をする．このとき，Weil の明示公式の基本形は次のようになる．

Weil の明示公式の基本形 s は $0\leq\sigma\leq1$ なる複素数とする．$\mathbf{R}$ 上の実数値関数 ψ は次の Condition 1, 2 を満たすとする：

Condition 1 ψ は normalized されている．即ち，

$$\psi(x)=\frac{\psi(x+)+\psi(x-)}{2},\quad x\in\mathbf{R},$$

を満たす．但し，$\psi(x+)$ は ψ の x における右極限，$\psi(x-)$ は左極限を意味する．

Condition 2 $0<\delta'<1$ とし，$G(x)$ を

$$G(x)=\begin{cases}e^{(1-\sigma+\delta')x}, & x\geq0\\ e^{-(\sigma+\delta')x}, & x<0\end{cases}$$

で定義する．このとき、$\psi(x)G(x)$ の $\mathbf{R}$ 上の総変動は有限である．

これらの条件を満たす ψ に対して $g(x)=\psi(\log x)$ とおく．このとき

$$\begin{aligned}&\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\psi(\log n)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{1-s}}\psi(-\log n)+\sum_{\rho}(M_sg)(\rho)\\&-(M_sg)(1)-(M_sg)(0)+\psi(0)\log\pi\\&=\frac{1}{2}\lim_{V\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{1/2-iV}^{1/2+iV}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{w}{2}\right)+\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1-w}{2}\right)\right)(M_sg)(w)dw\end{aligned}$$

が成立する．但し，$\sum_\rho$ は $|\gamma|<V$ なる和の $V\to\infty$ としたときの極限を意味する．

基本形の右辺にある $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ を含む積分を I と記すことにする．I の考察に移ろう．この量の簡明な表示は Barner [1] によって与えられた．Barner は，まず，I は (ゆるい) 超関数の Fourier 逆変換の類似であることに注目した．まず，簡単な計算により，

$$I=\lim_{V\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-V}^{V}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\frac{1}{2}+iv}{2}\right)\left(\frac{\psi(x)e^{x(\frac{1}{2}-s)}+\psi(-x)e^{-x(\frac{1}{2}-s)}}{2}\right)^{\wedge}(-v)dv,$$

“ハット”は通常の Fourier 変換，を得る．この右辺に対応する超関数は

$$W(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\frac{1}{2}+iv}{2}\right)\widehat{\alpha}(-v)dv, \tag{7}$$

α はシュワルツ空間の元，である．W は (ゆるい) 超関数

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{\frac{1}{2}+iv}{2}\right) \tag{8}$$

の Fourier 逆変換であるから，Fourier 変換すると (8) になる超関数をみつければ，それが W である．とはいっても，結局は，(7) を計算していくしかない．Barner はこの計算のために，Gauss の公式

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-zx}}{1-e^{-x}}\right)dx, \quad \Re z > 0$$

を用いた．Gauss の公式を (7) に代入して計算すると

$$W(\alpha) = \int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-2x}}{x}\alpha(0) - \frac{2e^{-\frac{x}{2}}}{1-e^{-2x}}\alpha(x)\right)dx$$

となる．従って、形式的に $\alpha(x) = (\psi(x)e^{x(\frac{1}{2}-s)} + \psi(-x)e^{-x(\frac{1}{2}-s)})/2$ と置き換えることにより

$$I = \int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-2x}}{x}\psi(0) - \frac{e^{-xs}}{1-e^{-2x}}\psi(x) - \frac{e^{-x(1-s)}}{1-e^{-2x}}\psi(-x)\right)dx$$

となることが期待できる．

Barner はこの予測を基に，数論的な応用に耐えうる，十分広い class に属す ψ について，この等式が成立することを証明した．

Barner の表示　**R** 上の実数値関数 ψ は

Condition 1 ψ は normalized されている．

Condition 2' ψ は **R** 上の有界変動関数であり，かつ，$L^1(\mathbf{R})$ に属す．

Condition 3 ある正数 ε が存在して

$$\psi(x) = \psi(0+) + O(|x|^{\varepsilon}), \quad x \to 0+$$
$$\psi(x) = \psi(0-) + O(|x|^{\varepsilon}), \quad x \to 0-.$$

の三条件を満たすとする．このとき，次が成立する．

$$\frac{1}{2}\lim_{V\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{1/2-iV}^{1/2+iV}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{w}{2}\right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1-w}{2}\right)\right)(M_s g)(w)dw$$
$$= \int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-2x}}{x}\psi(0) - \frac{e^{-xs}}{1-e^{-2x}}\psi(x) - \frac{e^{-x(1-s)}}{1-e^{-2x}}\psi(-x)\right)dx.$$

Condition 2' の主張は Condition 2 のもとで導くことができる．さらに，右辺を再び Gauss の公式を使って計算していく．そして，Weil の明示公式の基本形に代入すると，最終的に次を得る．

Weil–Barner の明示公式 s は $0 \le \sigma \le 1$, $s \neq 0$, $s \neq 1$ とする．ψ は Condition 1, 2, 3 を満たすとする。このとき，次が成立する．

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\psi(\log n)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{1-s}}\psi(-\log n)+\sum_{\rho}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{x(\rho-s)}dx\\
&-\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{x(1-s)}dx-\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{-xs}dx+\psi(0)\log\pi\\
&=\frac{\psi(0+)}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s}{2}\Big)+\frac{\psi(0-)}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\\
&-\int_0^{\infty}\frac{e^{-xs}}{1-e^{-2x}}(\psi(x)-\psi(0+))dx-\int_0^{\infty}\frac{e^{-x(1-s)}}{1-e^{-2x}}(\psi(-x)-\psi(0-))dx.
\end{aligned}$$

5 Montgomery の明示公式，Selberg の明示公式の復元

この節では，Weil–Barner の明示公式に二つのパラメーター u, v を組み込み，そこから，これまでに紹介した明示公式が復元できることを説明する．尚，ここからは ψ が満たすべき条件については省略させていただきたい．

$u>0, v\in\mathbf{R}$ とする．Weil–Barner の明示公式で ψ の代わりに $\psi(\frac{\cdot-v}{u})$ を採用すると，

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\psi\Big(\frac{\log n-v}{u}\Big)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{1-s}}\psi\Big(\frac{-\log n-v}{u}\Big)\\
&+\sum_{\rho}e^{v(\rho-s)}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\Big(\frac{x}{u}\Big)e^{x(\rho-s)}dx-\int_{-\infty}^{\infty}\psi\Big(\frac{x-v}{u}\Big)e^{x(1-s)}dx\\
&-\int_{-\infty}^{\infty}\psi\Big(\frac{x-v}{u}\Big)e^{-xs}dx+\psi\Big(\frac{-v}{u}\Big)\log\pi\\
&=\frac{1}{2}\psi\Big(\frac{-v}{u}+\Big)\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s}{2}\Big)+\frac{1}{2}\psi\Big(\frac{-v}{u}-\Big)\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\\
&-\int_0^{\infty}\frac{e^{-xs}}{1-e^{-2x}}\left(\psi\Big(\frac{x-v}{u}\Big)-\psi\Big(\frac{-v}{u}+\Big)\right)dx\\
&-\int_0^{\infty}\frac{e^{-x(1-s)}}{1-e^{-2x}}\left(\psi\Big(\frac{-x-v}{u}\Big)-\psi\Big(\frac{-v}{u}-\Big)\right)dx \qquad (9)
\end{aligned}$$

となる．ψ にある程度のなめらかさを仮定し，部分積分などをして計算すると，次を

得る：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\psi\Big(\frac{\log n-v}{u}\Big)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{1-s}}\psi\Big(\frac{-\log n-v}{u}\Big)\\
&+\sum_{\rho}e^{v(\rho-s)}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\Big(\frac{x}{u}\Big)e^{x(\rho-s)}dx+\psi\Big(\frac{-v}{u}\Big)\log\pi\\
&=\frac{1}{2}\psi\Big(\frac{-v}{u}+\Big)\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s}{2}\Big)+\frac{1}{2}\psi\Big(\frac{-v}{u}-\Big)\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\\
&+\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{1-s}\right)\left(\psi\Big(\frac{-v}{u}+\Big)-\psi\Big(\frac{-v}{u}-\Big)\right)\\
&-\frac{1}{u}\int_0^{\infty}\psi'\Big(\frac{x-v}{u}\Big)\frac{e^{x(1-s)}}{1-s}dx+\frac{1}{u}\int_0^{\infty}\psi'\Big(\frac{-x-v}{u}\Big)\frac{e^{xs}}{s}dx\\
&+\frac{1}{u}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\psi'\Big(\frac{x-v}{u}\Big)\frac{e^{-x(2j+s)}}{-(2j+s)}dx-\frac{1}{u}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\psi'\Big(\frac{-x-v}{u}\Big)\frac{e^{-x(2j+1-s)}}{-(2j+1-s)}dx.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

(10) から Montgomery の明示公式を復元してみよう．(10) で $u=1$ とおいたものの左辺第一項，第三項，右辺第一項，第二項以外は (実は，$\psi(x),\psi'(x)\ll G(x)^{-1}$, G は Condition 2 におけるもの，を仮定しているので)，

$$
\frac{e^{(1-\sigma)v}}{|1-s|}+\left(1+\frac{1}{|s|}\right)e^{-(\sigma+\delta')v}
$$

で押さえられる．右辺第一項，第二項には

$$
\frac{\Gamma'}{\Gamma}(w)=\log w+O\Big(\frac{1}{|w|+1}\Big)
$$

を用いる．こうして

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\psi(\log n-v)+\sum_{\rho}e^{v(\rho-s)}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{x(\rho-s)}dx\\
&=\psi(-v)(\log(|t|+2)+O(1))+O\left(\frac{e^{(1-\sigma)v}}{|1-s|}+\left(1+\frac{1}{|s|}\right)e^{-(\sigma+\delta')v}\right)
\end{aligned}
$$

が得られる．これで，ほぼ，Montgomery の明示公式に近くなった．完全に復元するには，Riemann 予想を仮定し，$\rho=1/2+i\gamma$, $v=\log Y$、$s=1/2+it$, $\psi(x)=e^{-|x|}$, $\delta'=\frac{1}{2}$ を採用し，計算していけばよい．

次に，Selberg の明示公式を復元しよう．(10) で $v=0$ とおき，ψ は $x<0$ で $\psi(x)=0$ を満たすとする．このとき

$$
\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\psi\Big(\frac{\log n}{u}\Big)+\sum_{\rho}\int_0^{\infty}\psi\Big(\frac{x}{u}\Big)e^{x(\rho-s)}dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\psi(0+)\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s}{2}\Big) - \frac{1}{2}\psi(0+)\log\pi + \Big(\frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\Big)\psi(0+) \\
&- \frac{1}{u}\int_0^\infty \psi'\Big(\frac{x}{u}\Big)\frac{e^{x(1-s)}}{1-s}dx + \frac{1}{u}\sum_{j=1}^\infty \int_0^\infty \psi'\Big(\frac{x}{u}\Big)\frac{e^{-x(2j+s)}}{-(2j+s)}dx
\end{aligned}
$$

となる．ここで

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \psi\Big(\frac{x}{u}\Big)e^{x(\rho-s)}dx = -\frac{\psi(0+)}{\rho-s} - \int_0^\infty \psi'(x)\frac{e^{xu(\rho-s)}}{\rho-s}dx \\
&\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s}{2}\Big) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\log\pi + \sum_\rho \frac{1}{s-\rho}
\end{aligned}
$$

を代入し (後者の等式については，[5] p.80–82 を参照)，部分積分などをして計算すると

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^s}\psi\Big(\frac{\log n}{u}\Big) - \sum_\rho \int_0^\infty \psi'(x)\frac{e^{xu(\rho-s)}}{\rho-s}dx + \psi(0+)\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \\
&= -\frac{1}{u}\int_0^\infty \psi'\Big(\frac{x}{u}\Big)\frac{e^{x(1-s)}}{1-s}dx + \frac{1}{u}\sum_{j=1}^\infty \int_0^\infty \psi'\Big(\frac{x}{u}\Big)\frac{e^{-x(2j+s)}}{-(2j+s)}dx
\end{aligned}
$$

が得られる．これで，ほぼ，Selberg の明示公式に近くなった．完全に復元するには，$u = \log X$ とおき

$$
\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}
$$

を採用して計算していけばよい．

尚，基本明示公式を導くには (9) において，$v = 0$, $u = \log X$ とおき

$$
\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0, 1 \\ 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}
$$

を採用して計算していけばよい．

先に，Selberg の明示公式は基本明示公式をスムーズ化したものだと書いたが，その意図はこの二つの ψ にあるのだった．$x > 0$ で連続化することによって，非自明零点にわたる和を絶対収束させられたのである．また，Selberg の明示公式を復元する ψ は，$\psi'(x) = 0$, $0 < x < 1$, であるから

$$
\sum_\rho \int_0^\infty \psi'(x)\frac{e^{xu(\rho-s)}}{\rho-s}dx = \sum_\rho \int_1^\infty \psi'(x)\frac{e^{xu(\rho-s)}}{\rho-s}dx
$$

となり，x が 0 に近いときの挙動を削ることができる．従って，この量は，Riemann 予想を仮定し $\frac{1}{2} < C \le \sigma$ ならば，$O\left(\frac{X^{\frac{1}{2}-\sigma}}{\log X}\right)$ で押さえられることになったのである．まさにこの ψ の選択は絶妙であるといわなければならない．

Selberg の明示公式，Montgomery の明示公式は，彼らの最終結果のための道具にすぎず，また彼らの証明も，解析数論における標準的な方法に基づいていて，難しくはない．以上では，わざわざ遠回りをしてみたが，これによって Weil–Barner の明示公式との関連がはっきりしたと思うし，Selberg, Montgomery の明示公式の絶妙さを再確認できたのではないかと思う．一方で，パラメーター u, v を含む Weil–Barner の明示公式 (9) の意義も確認できたといってよいかもしれない．次の節では，このパラメーターつき明示公式が主役になる．

6 主結果

(9) で $s = \frac{1}{2}$ とおく．すると, 零点に関する和

$$\sum_{\rho} e^{v(\rho-\frac{1}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{x}{u}\right) e^{x(\rho-\frac{1}{2})} dx \tag{11}$$

がいくつかの項によって表示できる．[7] では，そのいつくかの項を評価することによって，(11) の $u \to 0+$ としたときの挙動を考察した．(11) の $u \to 0+$ としたときの挙動を調べたいと思った動機は，次の節で述べることとしたい．この節では，[7] で得た結果を述べよう．

定理 $\mathbf{R}$ 上の実数値関数 ψ は Condition 1 を満たし，$\psi\left(\frac{\cdot-v}{u}\right)$ は Condition 2 ($\sigma = \frac{1}{2}$ としたもの) を満たすとする．$|\psi(x)| \le Ce^{-\beta|x|}$, C, β は正数，とする．ある正数 A, L, ε が存在して，$|\psi(\alpha) - \psi(x+\alpha)| \le L|x|^{\varepsilon}$ が $|\alpha| > A$ なるすべての α について成立するとする．このとき

$$\sum_{\rho} e^{v(\rho-\frac{1}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{x}{u}\right) e^{x(\rho-\frac{1}{2})} dx$$
$$= \begin{cases} O(u), & u \to 0+, \\ & \text{if } v \ne \pm\log m,\ m = 1,2,3,\ldots, \\ \frac{\Lambda(m)}{\sqrt{m}}\psi(0) + O(u), & u \to 0+, \\ & \text{if } v = \pm\log m,\ m = 2,3,4\ldots, \\ -\psi(0)\log(2\pi u) + \int_0^{\infty}\left(\psi(0)e^{-x} - \frac{\psi(x)+\psi(-x)}{2}\right)\frac{dx}{x} & \\ +O(u), & u \to 0+, \quad \text{if } v = 0 \end{cases}$$

この結果における，一番上の評価と二番目の漸近式について簡単に説明したい．(9) で $s = \frac{1}{2}$ とおいたものについて，$v \ne 0$ ならば，非自明零点に関する和 (11) と Dirichlet 級数の部分以外は (かなり骨が折れるが)，$O(u)$ で押さえられる．Dirichlet

級数の部分については，$\pm\log n = v$ となるような自然数 n があるときのみ，少し挙動が変わるが，$\pm\log n \neq v$ なる n についての Dirichlet 級数部分は，やはり $O(u)$ で押さえられる．これが二番目の漸近式の主要項の意味である．一番上の評価も二番目の漸近式も，証明方法としては同じであり，$v \neq 0$ なる条件がよく効いている．この場合に，なぜ，ほとんどの項が $O(u)$ かについては，簡単には説明できないのでご勘弁を．

一方，$v = 0$ の場合である三番目の漸近式の主要項の由来は，$v \neq 0$ の場合とかなり異なる．以下では，この三番目の漸近式について考察していきたい．

(9) で $s = \frac{1}{2}$, $v = 0$ とおく．また，

$$\Psi(x) = \frac{\psi(x) + \psi(-x)}{2}$$

なる記号を導入して書き直すと

$$\sum_\rho \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{x}{u}\right) e^{x(\rho - \frac{1}{2})} dx = -2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \Psi\left(\frac{\log n}{u}\right) + 2\int_{-\infty}^{\infty} \Psi\left(\frac{x}{u}\right) e^{\frac{x}{2}} dx$$
$$- \Psi(0)\log\pi + \Psi(0)\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4}\right) - 2\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{1 - e^{-2x}} \left(\Psi\left(\frac{x}{u}\right) - \Psi(0)\right) dx \qquad (12)$$

となる．仮定 $|\psi(x)| \leq Ce^{-\beta|x|}$ によって，(12) の右辺第一項と第二項は $O(u)$ で押さえられることがわかる．そこで

$$J = -\Psi(0)\log\pi + \Psi(0)\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4}\right) - 2\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{1 - e^{-2x}} \left(\Psi\left(\frac{x}{u}\right) - \Psi(0)\right) dx$$

とおき，この量を考察していこう．

まず，簡単な計算から，

$$J + \Psi(0)\log\pi - \Psi(0)\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4}\right) = -\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} \left(\Psi\left(\frac{x}{u}\right) - \Psi(0)\right) \frac{dx}{x}$$
$$+ 2\Psi(0)\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{2x} + 1\right) e^{-\frac{x}{2}} dx$$
$$- 2\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{2x} + 1\right) e^{-\frac{x}{2}} \Psi\left(\frac{x}{u}\right) dx \qquad (13)$$

を得る．ここで，

$$E(x) = \left(\frac{1}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{2x} + 1\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

とおこう．この E は $(0, \infty)$ 上連続かつ有界であり，さらに L^1 可積分である．そのおかげで，(13) の右辺第三項が $O(u)$ で押さえられることが確認できる．また，変形された Gauss の公式

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \log z - \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + 1\right) e^{-zx} dx, \quad \Re z > 0$$

(Lebedev [8] p.9 参照) によって，

$$2\int_0^\infty E(x)dx = \log\frac{1}{4} - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1}{4}\Big)$$

がわかる．これを (13) に代入すれば，

$$J + \Psi(0)\log\pi = -\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}\left(\Psi\Big(\frac{x}{u}\Big) - \Psi(0)\right)\frac{dx}{x} + \Psi(0)\log\frac{1}{4} + O(u)$$

を得る．これの右辺をさらに計算していく．

$$\log z = \int_0^\infty (e^{-x} - e^{-zx})\frac{dx}{x}, \quad \Re z > 0 \tag{14}$$

により，

$$J + \Psi(0)\log\pi = \int_0^\infty \left(e^{-2x}\Psi(0) - e^{-\frac{x}{2}}\Psi\Big(\frac{x}{u}\Big)\right)\frac{dx}{x} + O(u) \tag{15}$$

を得る．(15) の右辺第一項を K と記そう．

$$K = \Psi(0)\int_0^\infty (e^{-2ux} - e^{-x})\frac{dx}{x} + \int_0^\infty \left(\Psi(0)e^{-x} - \Psi(x)\right)\frac{dx}{x} + \int_0^\infty \Psi(x)(1 - e^{-\frac{ux}{2}})\frac{dx}{x}$$

と分割できる．右辺，第三項は $1 - e^{-\frac{ux}{2}}$ がよい性質をもっているので $O(u)$ で押さえられることが確認できる．右辺第二項は定数である．右辺第一項は (14) により，$-\Psi(0)\log(2u)$ である．従って，

$$K = -\Psi(0)\log(2u) + \int_0^\infty \left(\Psi(0)e^{-x} - \Psi(x)\right)\frac{dx}{x} + O(u)$$

を得る．以上を合わせると，

$$J = -\Psi(0)\log(2\pi u) + \int_0^\infty \left(\Psi(0)e^{-x} - \Psi(x)\right)\frac{dx}{x} + O(u)$$

となり，これで，定理における三番目の漸近式が導かれた．

7 Beurlingのスペクトル理論から

最後の節になってしまったが，前節で予告したように，非自明零点にわたる和 (11) で $u \to 0+$ としたときの挙動を調べたいと思った動機を述べてみよう．

φ を $\mathbf{R}$ 上の関数としよう．φ が三角多項式 $\sum_\lambda a_\lambda e^{ix\lambda}$ で近似できるかどうか，という問題を掲げてみる．まず，最初に問題になるのは，指数の集合 $\{\lambda\}$ をどのように

とらえるべきか，であろう．φ がよい性質をもっていれば (例えば，急減少ならば)，Fourier 反転公式により，

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}(\lambda)e^{ix\lambda}d\lambda \tag{16}$$

が成立する．これから，$\widehat{\varphi}$ の台を $\{\lambda\}$ ととらえることは自然であろう．さて，$\mathbf{R}$ 上の周期関数はある程度の滑らかさがあれば，周期を指数とする三角多項式で近似できることが知られている．一方で，周期関数に対しては，そもそも (通常の意味での) Fourier 変換が考えられず，周期を Fourier 変換の台ととらえることはできない．そこで，まず，Fourier 変換の概念を拡張しようとすることは自然であろう．以下では，A. Beurling による Fourier 変換の拡張とその応用について，簡単に述べたい．

φ は $\mathbf{R}$ 上の可測関数で，全ての正数 u について

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|e^{-u|t|}dt < \infty \tag{17}$$

を満たすとしよう．周期関数，多項式オーダーの関数はこれを満たす．この φ に対して，Beurling は

$$U_{\varphi}(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-u|t|-itv}dt, \quad u>0,\ v\in\mathbf{R} \tag{18}$$

で定義される上半平面上の調和関数 $U_{\varphi}(u,v)$ を導入した．そして，全ての正数 ε について

$$\varlimsup_{u\to+0}\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon}|U_{\varphi}(u,v)|dv > 0$$

を満たす λ に注目し，このような λ たちからなる集合を，“φ のスペクトル集合” と呼んだ．

ところで，(17) を満たす φ について

$$\Phi_{+}(z) = \int_{0}^{\infty}\varphi(t)e^{izt}dt, \quad \Im z > 0$$

と

$$\Phi_{-}(z) = -\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)e^{izt}dt, \quad \Im z < 0.$$

を考えると，$\Phi_{+}(z)$ は上半平面上で正則であり，$\Phi_{-}(z)$ は下半平面上で正則である．また，

$$U_{\varphi}(u,v) = \Phi_{+}(v+iu) - \Phi_{-}(v-iu)$$

が確認できる．φ のスペクトル集合の定義から，スペクトル集合の補集合上では，v の関数としてみた $U_{\phi}(u,v)$ は，$u\to 0+$ としたとき，0 に広義一様収束することが知られている．このことから，上半平面上の正則関数 $\Phi_{+}(z)$ はスペクトル集合の補集合上を通過して，下半平面上の正則関数 $\Phi_{-}(z)$ に解析接続されることがわかる．以

上から，$\lim_{u\to 0+} U_\phi(u,v)$ は，現代流にいえば，この解析接続した正則関数を定義関数とする一変数佐藤超関数であり，スペクトル集合はその佐藤超関数の台である，といえよう．

いずれにしても，Fourier 変換が拡張され，それの台がもとの関数を復元しうる指数の集合であろうと考えられた．これから，現実に，その台の元を使って元の関数が復元できるかどうかは，別の極めて難しい問題である．どの関数空間で考えるかによって，全く異なるし，また，どの位相で考えるかも問題である．Bohr の概周期関数については，それは三角多項式の一様収束極限で表せる，ということが，Bohr 自身によって証明されたが，超関数的な説明もできる．つまり，有界可測関数のなす空間 $L^\infty(\mathbf{R})$ に一様収束ノルムによる位相を入れておく．その部分空間として，有界かつ一様連続な関数たちからなるものを考える．その部分空間の元について，超関数の意味での Fourier 変換の台がある条件を満たす集合であるならば，その台の元を使った三角多項式で一様ノルムの意味で近似できることが知られている．詳しくは，Loomis [10] を参照されたい．超関数的な立場から，関数を三角多項式で復元することに関して，Beurling は深く重要な結果を多く残しているが，これを説明することは著者の能力を遥かに超えている．Beurling 全集 [2] を参考にしていただければと思っている (とくに，[3])．また，Carleson による概説 [4] もわかりやすく参考になると思う．

さて，我々の共同研究の動機について述べよう．Riemann ゼータ関数の非自明零点に関する和

$$\sum_\rho e^{v(\rho-\frac{1}{2})}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\Big(\frac{x}{u}\Big)e^{x(\rho-\frac{1}{2})}dx$$

を考察したのだが，説明のため，Riemann 予想を仮定すると，この和は

$$\sum_\gamma \int_{-\infty}^{\infty}\psi\Big(\frac{x}{u}\Big)e^{i\gamma x}dx\cdot e^{i\gamma v} \tag{19}$$

となる．我々は，(18) と (19) が，積分と和との違いがあるけれども，似ていると感じた．そこで，(19) において，v を固定し，$u\to 0+$ としたらどうなるだろうか考えてみようということになった．これが，我々の研究の動機である．主結果の漸近式は，Beurling 流に似せていえば，非自明零点に関する何らかの量のスペクトル集合は

$$\{0\}\cup\{\pm\log p^l,\ p\text{ は素数},\ l\text{ は自然数}\}$$

なのかなあ，と思ったりもしている．

References

[1] K. Barner, On A. Weil's explicit formula, J. Reine angew. Math. **323** (1981), 139–152.

[2] A. Beurling, The collected works of Arne Beurling, Volume 2, Harmonic Analysis, Birkhäuser Boston, 1989.

[3] A. Beurling, Sur les spectres des fonctions, Colloques internationaux du centre national de la recherche scientifique, Analyse harmonique, XV, Nancy, 1947, 9–29.

[4] L. Carleson, Wiener's Tauberian Theorem, Proc. Symp. Pure Math. **60**, A.M.S., Providence (1997), 65–70.

[5] H. Davenport, Multiplicative Number Theory, 3rd ed., Springer-Verlag, 2000.

[6] D. A. Goldston, S. M. Gonek, H. L. Montgomery, Mean values of the logarithmic derivative of the Riemann zeta-function with applications to primes in short intervals, J. reine angew. Math. **537** (2001), 105–126.

[7] Y. Kamiya and M. Suzuki, An attempt to interpret the Weil explicit formula from Beurling's spectral theory, プレプリント.

[8] N. N. Lebedev, Special Functions and their Applications, Dover Publications, 1972.

[9] J. E. Littlewood, On the zeros of the Riemann zeta-function, Proc. Camb. Phil. Soc. **22** (1924), 295–318.

[10] L. H. Loomis, The spectral characterization of a class of almost perioic functions, Ann. of Math. **72** (1960), 362–368.

[11] H. L. Montgomery, The pair correlation of zeros of the zeta function, Proc. Symp. Pure Math. **24**, A.M.S., Providence (1973), 181–193.

[12] A. Selberg, On the remainder in the formula for $N(T)$, the number of zeros of $\zeta(s)$ in the strip $0 < t < T$, Avh. Norske Vid. Akad. Oslo. I. **1** (1944), 27 pp.

[13] E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-function, 2nd ed., Clarendon Press (Oxford, 1986).

[14] A. Weil, Sur les "formules explicites" de la théorie des nombres premiers, Comm. Séminaire Math. Université de Lund (dédié a M. Riesz) (1952), 252–265.

19-4 Nishinobo Daiwa-cho
Okazaki-city Aichi 444-0931
Japan
e-mail: kamiya-9@m3.catvmics.ne.jp